BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Г.К.НАМАЗОВ, Я.Т.МЕГРАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе исследована одна обратная задача для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с несамосопряженными краевыми условиями. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема о существовании и единственности. Далее пользуясь этими фактами доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

В области $D_T = \{(x,t): 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим уравнение [1]:

$$u_{tt}(x,t) - u_{ttxx}(x,t) - u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

при несамосопряженных граничных

$$u(0,t) = 0,\ u_x(0,t) = u_x(1,t) \qquad (0 \le t \le T), \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \qquad (0 \le x \le 1). \tag{3}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы, а функция $a(t)$ неизвестна. Требуется определить пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, если задана дополнительная информация

$$u(1,t) = h(t) \qquad 0 \le t \le T\ , \tag{4}$$

где $h(t)$ - заданная функция.

Под классическим решением задачи (1) – (4) понимаем следующее

Определение. Классическим решением задачи (1)-(4) назовем пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;
3) уравнение (1),условия (2), (3) и (4)удовлетворяются в обычном смысле.

Аналогично [2] доказывается следующая

Лемма 1. Пусть $h(t) \in c^2[0,T]$, $h(t) \ne 0$ при $t \in [0,T]$ и выполняются условия согласования

$$\varphi(1) = h(0), \ \ \psi(1) = h'(0).$$

Тогда задача (1)-(4) эквивалентна задаче определения функции $u(x,t)$ и $a(t)$ из (1)-(3) и

$$a(t)h(t)+f(1,t)=h''(t)-u_{ttxx}(1,t)-u_{xx}(1,t) \qquad (0\le t\le T). \tag{5}$$

Известно [3], что последовательности функции

$$X_0(x)=x,\dots,X_{2k-1}(x)=x\cos 2\pi kx,\ X_{2k}(x)=\sin 2\pi kx,\dots \tag{6}$$

$$Y_0(x)=2,\dots,Y_{2k-1}(x)=4\cos 2\pi kx,\ Y_{2k}(x)=4(1-x)\sin 2\pi kx,\dots \tag{7}$$

образуют в $L_2(0,1)$ биортогональную систему и система (6) образует базис в $L_2(0,1)$. Тогда произвольная функция $g(x)\in L_2(0,1)$ разлагается в биортогональный ряд

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k X_k(x),$$

где

$$g_k=\int_0^1 g(x)Y_k(x)dx\,.$$

Для любой функции $g(x)\in L_2(0,1)$ справедлива оценка

$$\frac{3}{4}\|g(x)\|_{L_2(0,1)}\le\sum_{k=0}^{\infty} g_k^2\le 16\|g(x)\|^2_{L_2(0,1)}\,. \tag{8}$$

При предположениях

$$g(x)\in c^{2i-1}[0,1],\quad g^{(2i)}(x)\in L_2(0,1) \text{ и}$$

$$g^{(2s)}(0)=0,\quad g^{(2s+1)}(0)=g^{(2s+1)}(1)\quad \left(s=\overline{0,i-1};i\ge 1\right)$$

устанавливается справедливость оценок:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{2i}g_{2k-1}\right)^2\le\frac{8}{(2\pi)^{4i}}\left\|g^{(2i)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}, \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{2i}g_{2k}\right)^2\le\frac{8}{(2\pi)^{4i}}\left\|g^{(2i)}(x)(1-x)-2ig^{(2i-1)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}. \tag{10}$$

А при предположениях

$$g(x)\in C^{2i}[0,1],\ g^{(2i+1)}(x)\in L_2(0,1) \text{ и}$$

$$g^{2s}(0)=0,\quad g^{(2s-1)}(0)=g^{(2s-1)}(1),\ \left(s=\overline{0,i};\ i\ge 1\right)$$

устанавливается справедливость оценок:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{2i+1}g_{2k-1}\right)^2\le\frac{8}{(2\pi)^{2(2i+1)}}\left\|g^{(2i+1)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}, \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{2i+1}g_{2k}\right)^2\le\frac{8}{(2\pi)^{2(2i+1)}}\left\|g^{(2i+1)}(x)(1-x)-(2i+1)g^{(2i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}. \tag{12}$$

Известно [4], что при предположениях $g(x)\in C[0,1],\ g'(x)\in L_2(0,1)$,

$$g_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(kg_{2k-1})^2+\sum_{k=1}^{\infty}(kg_{2k})^2<+\infty$$

справедлива оценка

$$\|g'(x)\|_{L_2(0,1)}\le 2(1+\pi^2)\left\{g_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(kg_{2k-1})^2+\sum_{k=1}^{\infty}(kg_{2k})^2\right\}. \qquad (13)$$

Далее, при предположениях $g(x)\in C^{2i-1}[0,1]$, $g^{(2i)}(x)\in L_2(0,1)$,

$$g_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k^{2i}g_{2k-1})^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k^{2i}g_{2k})^2<+\infty$$

доказывается справедливость оценки:

$$\left\|g^{(2i)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2\le 2^{4i-1}\pi^{4i-2}(3\pi^2+2i^2)\left\{g_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k^{2i}g_{2k-1})^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k^{2i}g_{2k})^2\right\},(i\ge 1) \qquad (14)$$

А при предположениях $g(x)\in C^{2i}[0,1]$, $g^{(2i+1)}(x)\in L_2(0,1)$,

$$g_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k^{2i+1}g_{2k-1})^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k^{2i+1}g_{2k})^2<\infty$$

доказывается справедливость оценки:

$$\left\|g^{(2i+1)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2\le 2^{4i}\pi^{4i}\left(\pi^2+(1+2i)^2\right)\left\{g_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k^{2i+1}g_{2k-1})^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k^{2i+1}g_{2k})^2\right\}(i\ge 1). \qquad (15)$$

С целью исследования задачи (1)- (3), (5) введем следующее пространство.

Обозначим через $B_{2,T}^{\alpha}$ [4] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x),$$

рассматриваемых на D_T, для которых все функции $u_k(t)\in C[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\left\{\|u_0(t)\|_{C[0,T]}^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2\|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где функции $X_k(x)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ определены соотношениями (6).

Норму в этом множестве определим так: $\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha}}=J_T(u)$.

Через E_T^{α} обозначим пространство вектор- функций $\{u(x,t),a(t)\}$ таких, что $u(x,t)\in B_{2,T}^{\alpha}$, $a(t)\in C[0,T]$. Снабдим это пространство нормой

$$\|z\|_{E_T^{\alpha}}=\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha}}+\|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что E_T^{α} и $B_{2,T}^{\alpha}$ являются банаховыми пространствами.

Так как система (6) образует базис $L_2(0,1)$ и система (6) и (7) образует биортогональную в $L_2(0,1)$ систему функций, то первую компоненту $u(x,t)$ классического решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)-(3), (5) будем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x), \tag{16}$$

где

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)Y_k(x)dx \qquad (k=0,1,2,...)\,. \tag{17}$$

является решением следующей задачи:

$$u_0''(t)=F_0(u,a;t), \tag{18}$$

$$(1+\lambda_k^2)u_{2k-1}''(t)+\lambda_k^2 u_{2k-1}(t)=F_{2k-1}(u,a;t), \tag{19}$$

$$(1+\lambda_k^2)u_{2k}''(t)+\lambda_k^2 u_{2k}(t)=F_{2k}(u,a;t)-2\lambda_k(u_{2k-1}''(t)+u_{2k-1}(t)), \tag{20}$$

$$u_k(0)=\varphi_k,\quad u_k'(0)=\psi_k \qquad (k=0,1,2,...), \tag{21}$$

где

$$\lambda_k=2\pi k,\quad \varphi_k=\int_0^1\varphi(x)Y_k(x)dx,\quad \psi_k=\int_0^1\psi(x)Y_k(x)dx,$$

$$F_k(u,a;t)=a(t)u_k(t)+f_k(t),\ f_k(t)=\int_0^1 f(x,t)Y_k(x)dx\ \ (k=0,1,2,...),$$

причем функции $X_k(x)$ и $Y_k(x)$ $(k=0,1,2,...)$ определены соотношениями (6), (7) соответственно.

Решая задачу (18)-(21) находим:

$$u_0(t)=\varphi_0+\psi_0 t+\int_0^t (t-\tau)F_0(u,a;\tau)d\tau, \tag{22}$$

$$u_{2k-1}(t)=\varphi_{2k-1}\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t+$$
$$+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau, \tag{23}$$

$$u_{2k}(t)=\varphi_{2k}\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k}\sin\beta_k t+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau-$$
$$-\frac{\lambda_k(1-\beta_k^2)}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\left[t\varphi_{2k-1}\sin\beta_k t-\left(\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t+t\cos\beta_k t\right)\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\right]-$$
$$-\frac{2}{\lambda_k(1+\lambda_k^2)^2}\int_0^t\left(\int_0^\tau F_{2k-1}(u,a;\xi)\sin\beta_k(\tau-\xi)d\xi\right)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau-$$
$$-\frac{2\lambda_k}{\beta_k(1+\lambda_k^2)^2}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau, \tag{24}$$

где $\beta_k = \dfrac{\lambda_k}{\sqrt{1+\lambda_k^2}}$.

Очевидно, что

$$u_0'(t) = \psi_0 + \int_0^t F_0(u,a;\tau)d\tau, \tag{25}$$

$$u_{2k-1}'(t) = -\beta_k\varphi_{2k-1}\sin\beta_k t + \psi_{2k-1}\cos\beta_k t + \frac{1}{(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\cos\beta_k(t-\tau)d\tau,$$

$$\begin{gathered} u_{2k}'(t) = -\beta_k\varphi_{2k}\sin\beta_k t + \psi_{2k}\cos\beta_k t + \frac{1}{(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k}(u,a;\tau)\cos\beta_k(t-\tau)d\tau - \\ -\frac{\lambda_k(1-\beta_k^2)}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\left[\psi_{2k-1}(\sin\beta_k t + t\beta_k\cos\beta_k t) - \psi_{2k-1}(2\cos\beta_k t - t\beta_k\sin\beta_k t)\right] - \\ -\frac{2\beta_k}{\lambda_k(1+\lambda_k^2)^2}\int_0^t\left(\int_0^\tau F_{2k-1}(u,a;\xi)\sin\beta_k(\tau-\xi)d\xi\right)\cos\beta_k(t-\tau)d\tau - \\ -\frac{2\lambda_k}{(1+\lambda_k^2)^2}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\cos\beta_k(t-\tau)d\tau, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} u_{2k-1}''(t) = -\frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k^2}\left\{\varphi_{2k-1}\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\} - \frac{1}{1+\lambda_k^2}F_{2k-1}(u,a;t), \end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered} u_{2k}''(t) = -\frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k^2}\left\{\varphi_{2k}\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\} - \frac{1}{1+\lambda_k^2}F_{2k}(u,a;t) + \\ + \frac{2}{\lambda_k(1+\lambda_k^2)}\left\{\left[\varphi_{2k-1}\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right]\frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k^2} + \frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k^2}F_{2k-1}(u,a;t)\right\}. \end{gathered} \tag{28}$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ в (6), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)-(3), (5) получаем:

$$u(x,t)=\left(\varphi_0+\psi_0 t+\int_0^t (t-\tau)F_0(u,a;\tau)d\tau\right)x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_{2k-1}\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k\left(1+\lambda_k^2\right)}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}x\cos 2\pi kx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_{2k}\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t+\frac{1}{\beta_k\left(1+\lambda_k^2\right)}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau-\right.$$

$$-\frac{\lambda_k\left(1-\beta_k^2\right)}{\left(1+\lambda_k^2\right)\beta_k}\left[t\varphi_{2k-1}\sin\beta_k t-\left(\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t+t\cos\beta_k t\right)\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\right]-$$

$$-\frac{2}{\lambda_k\left(1+\lambda_k^2\right)^2}\int_0^t\left(\int_0^\tau F_{2k-1}(u,a;\xi)\sin\beta_k(\tau-\xi)d\xi\right)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau-$$

$$\left.-\frac{2\lambda_k}{\beta_k\left(1+\lambda_k^2\right)^2}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\sin 2\pi kx. \tag{29}$$

Теперь, из (5), с учетом (6), имеем:

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(1,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(u''_{2k-1}(t)+u_{2k-1}(t)\right)\right\}. \tag{30}$$

Далее, из (19), с учетом (27), получаем:

$$\upsilon_{2k-1}(t)\equiv\lambda_k^2\left(u''_{2k-1}(t)+u_{2k-1}(t)\right)=F_{2k-1}(u,a;\tau)-u''_{2k-1}(t)=$$

$$=\beta_k^2F_{2k-1}(u,a;t)+\frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k^2}\left\{\varphi_{2k-1}\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k\left(1+\lambda_k^2\right)}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}. \tag{31}$$

Тогда из (30) имеем:

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(1,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_{2k-1}(t)\right\}^{-1}\equiv h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(1,t)+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k^2}F_{2k-1}(u,a;t)+\frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k^2}\left[\varphi_{2k-1}\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{\beta_k\left(1+\lambda_k^2\right)}\int_0^t F_{2k-1}(u,a;\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right]\right\}\right\}. \tag{32}$$

Исходя из определения классического решения задачи (1)-(3), (5), легко доказывается следующая

Лемма 2. Если $\{u(x,t), a(t)\}$ - любое классическое решение задачи (1)-(3), (5), то функции

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \; (k = 0,1,2,...)$$

удовлетворяют системе (22)- (24).

Очевидно, что

$$1/\sqrt{2} < \beta_k < 1, \quad \left|\frac{\lambda_k(1-\beta_k^2)}{(1+\lambda_k^2)\beta_k}\right| = \frac{1}{(1+\lambda_k^2)\sqrt{1+\lambda_k^2}} < \lambda_k^{-3}.$$

Учитывая эти соотношения из (22)-(28) и (31), соответственно, имеем:

$$|u_0(t)| \le |\varphi_0| + T|\psi_0| + t\sqrt{t}\left(\int_0^t |F_0(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2},$$

$$|u_{2k-1}(t)| \le |\varphi_{2k-1}| + \sqrt{2}|\psi_{2k-1}| + \sqrt{2}\lambda_k^{-2}\sqrt{t}\left(\int_0^t |F_{2k-1}(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2},$$

$$|u_{2k}(t)| \le |\varphi_{2k}| + \sqrt{2}|\psi_{2k}| + \sqrt{2}\lambda_k^{-2}\sqrt{t}\left(\int_0^t |F_{2k}(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} +$$

$$+\lambda_k^{-3}\left(t|\varphi_{2k-1}| + (\sqrt{2}+t)\sqrt{2}|\psi_{2k-1}|\right) + 2\left(t\lambda_k^{-2}\sqrt{t}+\sqrt{2}\right)\lambda_k^{-3}\sqrt{t}\left(\int_0^t |F_{2k-1}(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2},$$

$$|u_0'(t)| \le |\psi_0| + \sqrt{t}\left(\int_0^t |F_0(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2},$$

$$|u_{2k-1}'(t)| \le |\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + \lambda_k^{-2}\sqrt{t}\left(\int_0^t |F_{2k-1}(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2},$$

$$|u_{2k}'(t)| \le |\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}| + \lambda_k^{-2}\sqrt{t}\left(\int_0^t |F_{2k}(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} +$$

$$+\lambda_k^{-3}\left((1+t)|\varphi_{2k-1}| + (2+t)|\psi_{2k-1}|\right) + 2\left(t\lambda_k^{-2}+1\right)\lambda_k^{-3}\sqrt{t}\left(\int_0^t |F_{2k-1}(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2},$$

$$|u_{2k-1}''(t)| \le |\varphi_{2k-1}| + \sqrt{2}|\psi_{2k-1}| +$$

$$+\sqrt{2}\lambda_k^{-2}\sqrt{t}\left(\int_0^t |F_{2k-1}(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} + \lambda_k^{-2}|F_{2k-1}(u,a;t)|,$$

$$\left|u''_{2k}(t)\right| \le \left|\varphi_{2k-1}\right| + \sqrt{2}\left|\psi_{2k-1}\right| + \sqrt{2}\lambda_k^{-2}\sqrt{t}\left(\int_0^t \left|F_{2k}(u,a;\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2} + \lambda_k^{-2}\left|F_{2k}(u,a;t)\right| +$$

$$+2\lambda_k^{-3}\left[\left|\varphi_{2k-1}\right| + \sqrt{2}\left|\psi_{2k-1}\right| + \sqrt{2}\lambda_k^{-2}\sqrt{t}\left(\int_0^t \left|F_{2k-1}(u,a;\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2} + \left|F_{2k-1}(u,a;t)\right|\right],$$

$$\upsilon_{2k-1}(t) \le \left|F_{2k-1}(u,a;t)\right| + \left|\varphi_{2k-1}\right| + \sqrt{2}\left|\psi_{2k-1}\right| +$$

$$+\sqrt{2}\lambda_k^{-2}\sqrt{t}\left(\int_0^t \left|F_{2k-1}(u,a;\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

Отсюда находим:

$$\left\|u_0(t)\right\|_{C[0,T]} \le \left|\varphi_0\right| + T\left|\psi_0\right| + T\sqrt{T}\left(\int_0^T \left|F_0(u,a;\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2}, \tag{33}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} \le \sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|\varphi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{1/2} +$$

$$+\sqrt{6}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|\psi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{1/2} + \sqrt{6}\sqrt{T}\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left|F_{2k-1}(u,a;\tau)\right|\right)^2 d\tau\right)^{1/2}, \tag{34}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} \le \sqrt{6}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|\varphi_{2k}\right|\right)^2\right)^{1/2} + 4\sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|\psi_{2k}\right|\right)^2\right)^{1/2} +$$

$$+4\sqrt{3}\sqrt{T}\left(\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left|F_{2k}(u,a;\tau)\right|\right)^2 d\tau\right)^{1/2} + \sqrt{6}T\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{2k-1}\right|^2\right)^{1/2} +$$

$$+4\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+T\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi_{2k-1}\right|^2\right)^{1/2} + 2\sqrt{6}\left(T\lambda_1^{-2}+\sqrt{2}\right)\sqrt{T}\left(\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty}\left|F_{2k-1}(u,a;\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2}, \tag{35}$$

$$\left\|u'_0(t)\right\|_{C[0,T]} \le \left|\psi_0\right| + \sqrt{T}\left(\int_0^T \left|F_0(u,a;\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2}, \tag{36}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u'_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} \le \sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|\varphi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{1/2} + \sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|\psi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{1/2} +$$

$$+\sqrt{T}\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left|F_{2k-1}(u,a;\tau)\right|\right)^2 d\tau\right)^{1/2}, \tag{37}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u'_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} \le \sqrt{6}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3|\varphi_{2k}|\right)^2\right)^{1/2} + \sqrt{6}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3|\psi_{2k}|\right)^2\right)^{1/2} +$$

$$+\sqrt{6}\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k|F_{2k}(u,a;\tau)|\right)^2 d\tau\right)^{1/2} + \sqrt{6}(1+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{2k-1}|^2\right)^{1/2} +$$

$$+\sqrt{6}(2+T)\lambda_1^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{2k-1}|^2\right)^{1/2} + 2\sqrt{6}\left(T\lambda_1^{-2}+1\right)\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}|F_{2k-1}(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}, \quad (38)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u''_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} \le 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3|\varphi_{2k-1}|\right)^2\right)^{1/2} + 2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3|\psi_{2k-1}|\right)^2\right)^{1/2} +$$

$$+2\sqrt{2}\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k|F_{2k-1}(u,a;\tau)|\right)^2 d\tau\right)^{1/2} + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left\|F_{2k-1}(u,a;t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}, \quad (39)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u''_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} \le 2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3|\varphi_{2k}|\right)^2\right)^{1/2} + 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3|\psi_{2k-1}|\right)^2\right)^{1/2} +$$

$$+4\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k|F_{2k}(u,a;\tau)|\right)^2 d\tau\right)^{1/2} + 2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left\|F_{2k}(u,a;t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} +$$

$$+4\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{2k-1}|^2\right)^{1/2} + 8\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{2k-1}|^2\right)^{1/2} + \lambda_1^{-2}\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}|F_{2k-1}(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} +$$

$$+2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|F_{2k-1}(u,a;t)\right\|^2_{C[0,T]}\right)^{1/2}, \quad (40)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left\|\upsilon_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} \le 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left\|F_{2k-1}(u,a;t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} +$$

$$+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k|\varphi_{2k-1}|\right)^2 + 2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|\psi_{2k-1}|^2\right)\right)^{1/2} +$$

$$+2\sqrt{2}\lambda_1^{-2}\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}|F_{2k-1}(u,a;\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}. \quad (41)$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (5) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^2[0,1]$, $\varphi^3(x)\in L_2[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi''(0)=0$, $\varphi'(0)=\varphi'(1)$;
2. $\psi(x)\in C^2[0,1]$, $\psi^3(x)\in L_2[0,1]$, $\psi(0)=\psi''(0)=0$, $\psi'(0)=\varphi'(1)$;

3. $f(x,t)\in C(D_T),\ f_x(x,t)\in L_2(D_T), f(0,t)=0;$

4. $h(t)\in C^2[0,T],\ h(t)\neq 0$ при $t\in[0,T]$.

$$\|u_0(t)\|_{C[0,T]}\le 2\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+2T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+2T\sqrt{T}\|a(t)u(x,t)+f(x,t)\|_{L_2(D_T)}. \quad (42)$$

Тогда из (33)-(41), (18) с учетом (11), (12), (8) соответственно получаем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\le 4\sqrt{6}\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+8\sqrt{3}\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+4\sqrt{3}\sqrt{T}\|a(t)u_x(x,t)+f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad (43)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\le 8\sqrt{3}\|\varphi'''(x)(1-x)-3\varphi''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+16\sqrt{6}\|\psi'''(x)(1-x)-3\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+8\sqrt{6}\sqrt{T}\|a(t)(u_x(x,t)(1-x)-u(x,t))+f_x(x,t)(1-x)-f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$
$$+4\sqrt{6}\,T\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+16\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+T\right)\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$8\sqrt{6}\left((2\pi)^{-1}T+\sqrt{2}\right)\sqrt{T}\|a(t)u(x,t)+f(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad (44)$$

$$\|u_0'(t)\|_{C[0,T]}\le 2\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+2\sqrt{T}\|a(t)u(x,t)+f(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad (45)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{2k-1}'(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\le 4\sqrt{6}\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+4\sqrt{6}\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+2\sqrt{2}\sqrt{T}\|a(t)u_x(x,t)+f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad (46)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{2k}'(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\le 8\sqrt{3}\|\varphi'''(x)(1-x)-3\varphi''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+8\sqrt{3}\|\psi'''(x)(1-x)-3\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+8\sqrt{3}\|a(t)(u_x(x,t)(1-x)-u(x,t))+f_x(x,t)(1-x)-f(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad (47)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{2k-1}''(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\le 8\sqrt{2}\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+16\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+8\sqrt{T}\|a(t)u_x(x,t)+f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}+4\sqrt{2}\left\|\|a(t)u_x(x,t)+f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}, \quad (48)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{2k}''(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\le 16\|\varphi'''(x)(1-x)-3\varphi''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+16\sqrt{2}\|\psi'''(x)(1-x)-3\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+8\sqrt{2}\sqrt{T}\left\|a(t)(u_x(x,t)(1-x)-u(x,t))+f_x(x,t)(1-x)-f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+8\left\|\left\|a(t)(u_x(x,t)(1-x)-u(x,t))+f_x(x,t)(1-x)-f(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+16\sqrt{2}\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+32\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{2}{\pi}\sqrt{T}\|a(t)u(x,t)+f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+8\sqrt{2}\left\|\|a(t)u(x,t)+f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(D_T)}, \tag{49}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\|\upsilon_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\leq 4\sqrt{2}\left\|\|a(t)u_x(x,t)+f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+4\sqrt{2}\|\varphi'(x)\|_{L_2(0,1)}+8\|\psi'(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\sqrt{T}\|a(t)u(x,t)+f(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \tag{50}$$

$$\|u_0''(t)\|_{C[0,T]}\leq 2\left\|\|a(t)u(x,t)+f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}. \tag{51}$$

Далее, из (42)-(44), с учетом (8) и (15) находим:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\leq A_1(T)+A_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{52}$$

где

$$A_1(T)=2\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+2T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+2T\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{C(D_T)}+$$

$$+4\sqrt{6}\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+8\sqrt{3}\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+4\sqrt{3}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+8\sqrt{3}\|\varphi'''(x)(1-x)-3\varphi'(x)\|_{L_2(0,1)}+16\sqrt{6}\|\psi'''(x)(1-x)-3\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+8\sqrt{6}\sqrt{T}\|f_x(x,t)(1-x)-f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+4\sqrt{6}T\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+16\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+T\right)\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+8\sqrt{6}\left((2\pi)^{-1}T+\sqrt{2}\right)\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_2(T)=\sqrt{3}T\sqrt{T}+4\pi^2\sqrt{3+2\pi^2}\sqrt{T}+\left(12\sqrt{6+4\pi^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{T}+$$

$$+\frac{24\sqrt{2}}{2}\left((2\pi)^{-1}T+\sqrt{2}\right)\sqrt{T}.$$

Теперь, из (32), с учетом (50), имеем:

$$\|a(t)\|_{C[0,T]}\leq B_1(T)+B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{53}$$

где

$$B_1(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h^{-1}(t)-f(1,t)\right\|_{C[0,1]}+4\sqrt{2}\left\|\left\|f_x(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$\left.+4\sqrt{2}\left\|\varphi'(x)\right\|_{L_2(0,1)}+8\left\|\psi'(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\sqrt{T}\left\|f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right\},$$

$$B_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left(16\pi^2\sqrt{2\left(9+6\pi^2\right)}+\frac{\sqrt{6T}}{\pi^2}\right).$$

Из неравенств (52), (53) заключаем:

$$\left\|u(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}+\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\le A(T)+B(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}, \quad (54)$$

где

$$A(T)=A_1(T)+B_1(T),\ \ B(T)=A_2(T)+B_2(T).$$

Итак, доказана следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1-4 и $B(T)(A(T)+2)^2<1$. Тогда задача (1)-(3), (5) имеет в шаре $K=K_R\left(\|z\|_{E^3_T}\le R=A(T)+2\right)$ из E^3_T единственное классическое решение.

Доказательство. В пространстве E^3_T рассмотрим уравнение

$$z=\Phi z, \quad (55)$$

где $z=\{u,a\}$, компоненты $\Phi_i\ (i=1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (29), (32), соответственно.

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K=K_R$ из E^3_T. Аналогично из (54) получаем, что для любых $z,z_1,z_2\in K_R$ справедливы оценки:

$$\left\|\Phi z\right\|_{E^3_T}\le A(T)+B(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}, \quad (56)$$

$$\left\|\Phi z_1-\Phi z_2\right\|_{E^3_T}\le B(T)R\left(\left\|a_1(t)-a_2(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}\right). \quad (57)$$

Тогда с учетом из оценок (56) и (57) следует, что оператор Φ действует в шаре $K=K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u,a\}$, которая является решением уравнения (55).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^3_{2,T}$, имеет непрерывные производные $u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Из неравенства (45)-(49) и (51) следует, что $u_t(x,t), u_{tx}(x,t), u_{txx}(x,t), u_{tt}(x,t),\ u_{ttx}(x,t), u_{ttxx}(x,t)$ непрерывны в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (5) удовлетворяются в обычном смысле.

Значит, $\{u(x,t),a(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(3), (5) причем, в силу леммы 2, оно единственное. Теорема доказана.

С помощью леммы 1, легко доказывается следующая

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и

$$\varphi(1)=h(0),\ \psi(1)=h'(0).$$

Тогда при достаточно малых значениях $T+\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}$ задача (1)-(4) имеет в шаре из E_T^3 единственное классическое решение.

$$K=K_R\left(\|z\|_{E_T^3}\le R=A(T)+2\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов С.А., Оразов Б.Б. Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u_{xx}-u]+u_{xx}=0$ и некоторых связанных с ним задачах // Журнал вычислительной математики и математической физики,1986, т.26, №1, с. 92-102.
2. Намазов Г.К., Мегралиев Я.Т. Исследование классического решения одномерной обратной краевой задачи для полулинейных псевдогиперболических уравнений высокого порядка// Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2003, №2, стр. 5-15.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условиям// - ДУ, т. 13, №2, с. 294-304.
4. Исмаилов А.И. Исследование классической разрешимости обратной одномерной краевой задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка// Дисс. канд. физ.- мат. наук, -Баку- 1999.

DÖRDTƏRTİBLİ PSEVDOHİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ TƏRS MƏSƏLƏ

Q.K.NAMAZOV, Y.T.MEHRƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə dördtərtibli psevdohiperbolik tənlik üçün öz-özünə qoşma olmayan sərhəd şərtli tərs məsələ tədqiq edilir. Bunun üçün əvvəlcə qoyulmuş məsələ ekvivalent məsələyə gətirilir və bu məsələnin varlığı və yeganəliyi isbat edilir. Sonra isə ekvivalentlikdən istifadə edərək qoyulmuş məsələnin varlığı və yeganəliyi göstərilir.

INVERSE PROBLEM FOR THE FORTH ORDER PSEVDOHIPERBOLIC EQUATIONS WITH NONSELFADJOINT BOUNDARY CONDITIONS

G.K.NAMAZOV, Y.T.MEHRALIYEV

SUMMARY

In this work an inverse problem for the forth order psedohyprbolic equation with nonselfadjoint boundary conditions is investigated. For this reason, first of all the initial problem reduces to the equalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness proves. Then using these facts the existence and uniqueness of the classical solution of initial problem is proved.